MATROÏDES — COMPLÉMENT SUR LA PREUVE DU THÉORÈME D'INTERSECTION

JEAN-SÉBASTIEN SERENI

Résumé.
Ce document contient les solutions aux exercices constituant la fin de la démonstration du théorème d'intersection.

Table des matières

1. Fin de la démonstration du théorème d'intersection 1

1. Fin de la démonstration du théorème d'intersection

Exercice 3.
(1) Si $X_i = \emptyset$ pour un indice $i \in \{1,2\}$, alors I est une base de $\mathscr{M}_i$, et donc I est de taille maximum dans $\mathcal{I}_i \cap \mathcal{I}_{3-i}$. La partition définie par $E_i = E$ et $E_{3-i} = \emptyset$ satisfait (2.1).
(2) D'abord $X_2 \subseteq E_1$ par définition donc $X_2 \cap E_2 = \emptyset$. L'hypothèse de non-existence d'un chemin augmentant de X_1 vers X_2 implique que $X_1 \cap E_1 = \emptyset$.
(3) Soit X un ensemble indépendant de $\mathscr{M}_1$ contenu dans E_1 de taille maximale. Alors $|X| = r_{\mathscr{M}_1}(E_1) > |I \cap E_1|$. Par (I3), il existe $x \in E_1 \setminus I$ tel que $(I \cap E_1) + x \in \mathcal{I}_1$.
(4) Comme $x \in E_1$ et $E_1 \cap X_1 = \emptyset$, il suit que $x \notin X_1$, c'est-à-dire $I + x \notin \mathcal{I}_1$.
(5) D'après (4) et le lemme du circuit unique, il existe un et un seul circuit C de $\mathscr{M}_1$ contenu dans $I + x$. Comme $(I \cap E_1) + x \in \mathcal{I}_1$, il existe un élément $y \in (C - x) \setminus (I \cap E_1) \subseteq I \setminus E_1$. De plus, $(I - y) + x$ ne contient pas de circuit de $\mathscr{M}_1$, donc $(I - y) + x \in \mathcal{I}_1$.
(6) Par (5), $y \to x$ est un arc de D_I. Or, $x \in E_1$ donc $y \in E_1$, ce qui est une contradiction. Ainsi, $r_{\mathscr{M}_1}(E_1) \leq |I \cap E_1|$.
(7) La preuve est la même : (3) est similaire ; (4) également car $E_2 \cap X_2 = \emptyset$ et ainsi (5) et (6) suivent. Donc $r_{\mathscr{M}_2}(E_2) \leq |I \cap E_2|$.
(8) On a

$$\begin{aligned} |I| &= |I \cap E_1| + |I \cap E_2| \\ &\leq r_{\mathscr{M}_1}(E_1) + r_{\mathscr{M}_2}(E_2) \quad \text{par (6) et (7).} \end{aligned}$$

Comme $I \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$, la partie démontrée en cours entraîne que

$$\max_{I' \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2} |I'| \leq \min_{F_1 \cup F_2 = E} r_{\mathscr{M}_1}(F_1) + r_{\mathscr{M}_1}(F_1).$$

Comme $E_1 \cup E_2 = E$, l'inégalité prouvée en (8) implique que I est de taille maximum (et que la somme des rangs de E_1 et E_2 est minimum parmi toutes les sommes de rangs de deux ensembles dont la réunion est E).

Date: 1er février 2012.

L'exercice suivant traite le cas où il existe un chemin augmentant P de X_1 vers X_2. Soit $I' \coloneqq I \triangle V(P)$. Le but, cette fois-ci, est de prouver que $I' \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$ et $|I'| > |I|$.

Exercice 4.

(1) D'abord, $I \setminus J = \{b_1, \ldots, b_\ell\}$ et $J \setminus I = \{a_1, \ldots, a_\ell\}$. En outre, par définition de P, le graphe G contient l'arête (a_i, b_i) pour tout $i \in \{1, \ldots, \ell\}$, ce qui donne un couplage parfait M entre $I \setminus J$ et $J \setminus I$.

Il reste à prouver l'unicité de M. D'après le lemme 1, nous pouvons supposer sans perte de généralité que si (a_i, b_j) est une arête de G avec $(i, j) \in \{1, \ldots, \ell\}^2$, alors $i \geq j$. Ceci implique que M est unique. En effet, soit M' un couplage parfait entre $I \setminus J$ et $J \setminus I$ dans G. Si $M' \neq M$, alors soit k le plus petit entier tel que $(a_k, b_k) \notin M'$. Le couplage M' contient donc une arête (a_k, b_j) avec $k < j$, ce qui contredit l'énumération choisie.

(2) L'application de la proposition 2 à G et $\mathscr{M}_1$ donne directement la conclusion.

(3) Si $a_i \in X_1$, alors $a_i \to b_{i+1} \to a_{i+2} \to \ldots \to a_\ell$ est un chemin augmentant de X_1 vers X_2 dans D_I. Comme P est un plus court chemin augmentant de X_1 vers X_2, nécessairement $i = 0$.

(4) Pour tout $i \in \{1, \ldots, \ell\}$, on a $r_{\mathscr{M}_1}(I + a_i) = r_{\mathscr{M}_1}(I)$ car $a_i \in X_1$ par (3). D'après le lemme 15 du cours, il vient que $r_{\mathscr{M}_1}(I \cup \{a_1, \ldots, a_\ell\}) = r_{\mathscr{M}_1}(I)$, c'est-à-dire $r_{\mathscr{M}_1}(I \cup J) = r_{\mathscr{M}_1}(I)$. Comme $r_{\mathscr{M}_1}(I) = |I| = |J| = r_{\mathscr{M}_1}(J)$, la conclusion suit.

(5) Comme $a_0 \in X_1$, par définition, $I + a_0 \in \mathcal{I}_1$. Comme $J \in \mathcal{I}_1$ et $|J| = |I| < |I + a_0|$, l'axiome d'augmentation implique l'existence d'un élément $x \in (I + a_0) \setminus J$ tel que $J + x \in \mathcal{I}_1$. Or $(I + a_0) \setminus J = \{a_0, a_1, \ldots, a_\ell\}$ et par (4) nous savons que si $i \in \{1, \ldots, \ell\}$, alors $r_{\mathscr{M}_1}(J) \leq r_{\mathscr{M}_1}(J + a_i) \leq r_{\mathscr{M}_1}(J + I) = r_{\mathscr{M}_1}(J)$. En particulier, nous en déduisons que $J + a_i \notin \mathcal{I}_1$ si $i \in \{1, \ldots, \ell\}$ et donc, nécessairement, $x = a_0$, i.e. $J + a_0 \in \mathcal{I}_1$.

(6) Les rôles joués dans cet exercice par X_1 et X_2 sont symétriques. Le même raisonnement s'applique au graphe obtenu en inversant l'orientation des arêtes de D_I. Donc $I' \in \mathcal{I}_2$.

(7) Ainsi, I' est un ensemble indépendant à la fois dans $\mathscr{M}_1$ et dans $\mathscr{M}_2$, de taille strictement plus grande que celle que I. En conséquence, partant d'un élément I de $\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$, nous avons prouvé que

- s'il n'existe pas de chemin augmentant, alors I est de taille maximum dans $\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$ et nous avons exhibé une partition (E_1, E_2) de E satisfaisant (2.1) ;
- s'il existe un chemin augmentant, alors I n'est pas de taille maximum et nous avons exhibé un élément de $\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$ de taille strictement supérieure à celle de I.

Nous avons donc bien terminé la démonstration du théorème d'intersection et la preuve suggère un algorithme pour trouver un élément de $\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$ de taille maximum.

Exercice 5.

Entrées : Un ensemble fini E et deux matroïdes $(E, \mathcal{I}_1)$ et $(E, \mathcal{I}_2)$ sur E
début
  $I \longleftarrow \emptyset$
  répéter
    Construire le graphe orienté D_I
    $X_1 \longleftarrow \{e \in E \setminus I \,:\, I + e \in \mathcal{I}_1\}$
    $X_2 \longleftarrow \{e \in E \setminus I \,:\, I + e \in \mathcal{I}_2\}$
    Soit P *un plus court chemin dans* D_I *de* X_1 *vers* X_2
      `/*` $V(P) = \emptyset$ `s'il n'existe pas de chemin de` X_1 `vers` X_2 `*/`
    si $V(P) \neq \emptyset$ **alors** $I \longleftarrow I \triangle V(P)$
  jusqu'à $V(P) = \emptyset$
  retourner I
fin