MATROÏDES — COMPLÉMENT SUR LA PREUVE DU THÉORÈME D'INTERSECTION

JEAN-SÉBASTIEN SERENI

Résumé.
Ce document contient la fin de la démonstration du théorème d'intersection, présentée sous forme d'exercices. Des résultats auxiliaires utilisés dans la démonstration sont prouvés dans la première partie.

Table des matières

Si X et Y sont deux ensembles, soit

$$X \triangle Y \coloneqq (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X).$$

1. Graphe d'échanges

Soit $\mathscr{M} = (E, \mathcal{I})$ un matroïde. Pour un ensemble indépendant I, soit D_I le graphe biparti avec bipartition $(I, E \setminus I)$ dans lequel (i, j) est une arête si, et seulement si, $i \in I$, $j \in E \setminus I$ et $(I - i) + j \in \mathcal{I}$. Le graphe D_I est appelé « graphe d'échanges » (relativement à I). Il s'agit d'un outil particulièrement utile pour exprimer et étudier les propriétés d'échange des ensembles indépendants dans les matroïdes.

Les résultats concernant le graphe d'échanges seront utilisés dans la prochaine section. Les preuves sont fournies, mais il est conseillé de chercher d'abord à démontrer les énoncés du lemme 1 et de la proposition 2 par soi-même.

Dans un graphe (quelconque), un « couplage » est un ensemble d'arêtes deux-à-deux disjointes. Un couplage M est « parfait » si tout sommet du graphe est incident à une arête de M. L'ensemble des arêtes du graphe G est noté $E(G)$.

Lemme 1. *Soit G un graphe biparti avec bipartition (X, Y). Supposons que G contienne un et un seul couplage parfait, noté M. Alors, il existe une énumération $x_1, \dots, x_t$ de X et une énumération $y_1, \dots, y_t$ de Y telles que*

- $M = \{(x_i, y_i) : 1 \le i \le t\}$ *et*
- $(x_i, y_j) \in E(G) \Rightarrow i \ge j$.

Démonstration. Notre démonstration comporte deux étapes. Tout d'abord, nous prouvons que X contient un sommet de degré un. Pour voir cela, orientons les arêtes dans M de X vers Y et les arêtes hors de M de Y vers X. Le graphe orienté $\vec{G}$ obtenu ne contient pas de cycle orienté : en effet, si C est un cycle orienté de $\vec{G}$, alors $M \triangle E(C)$ est un couplage parfait de G distinct de M.

Date: 12 février 2012.

Ainsi, $\vec{G}$ possède un sommet de degré entrant 0.[1] Comme tous les sommets de Y ont degré entrant au moins un (car M est un couplage parfait), il existe $x \in X$ de degré entrant 0, et donc le degré de x dans G est exactement un.

Nous prouvons à présent le résultat souhaité par récurrence sur $t \coloneqq |X|$. Le résultat est trivialement vrai si $t = 1$. Si $t \geq 2$, soit x un sommet G de degré exactement un. Notons y le voisin de x dans G. Le graphe biparti G' obtenu à partir de G en supprimant les sommets x et y possède un unique couplage parfait. D'après l'hypothèse de récurrence, nous pouvons donc écrire $X = \{x_2, \dots, x_t\}$ et $Y = \{y_2, \dots, y_t\}$ de sorte que $(x_i, y_j) \notin E(G')$ si $i < j$. Poser $x_1 \coloneqq x$ et $y_1 \coloneqq y$ fournit la conclusion souhaitée. $\square$

Proposition 2. *Soit $\mathscr{M} = (E, \mathcal{I})$ un matroïde. Soit $I \in \mathcal{I}$. Soit $J \subseteq E$ tel que $|J| = |I|$ et le graphe d'échanges D_I possède un unique couplage parfait entre $I \setminus J$ et $J \setminus I$. Alors $J \in \mathcal{I}$.*

Démonstration. Soit G le sous-graphe de D_I induit par $I \triangle J$. Le graphe biparti G possède donc un unique couplage parfait par hypothèse. Soient $i_1, \dots, i_t$ et $j_1, \dots, j_t$ les énumérations de $I \setminus J$ et de $J \setminus I$ fournies par le lemme 1, respectivement.

Si $J \notin \mathcal{I}$, il existe un circuit C de $\mathscr{M}$ contenu dans J. En particulier, $C \cap (J \setminus I) \neq \emptyset$ car $I \in \mathcal{I}$. Soit s le plus petit entier dans $\{1, \dots, t\}$ tel que $j_s \in C$. Nous allons montrer que $(I - i_s) + j_s \notin \mathcal{I}$, ce qui contredira le fait que (i_s, j_s) est une arête du couplage parfait de G. Pour cela, il nous suffit de prouver que $r_{\mathscr{M}}(I - i_s) = r_{\mathscr{M}}((I - i_s) + j_s)$, puisqu'il vient alors que $r_{\mathscr{M}}((I - i_s) + j_s) < r_{\mathscr{M}}(I) = |I| = |(I - i_s) + j_s|$, i.e. $(I - i_s) + j_s \notin \mathcal{I}$.

Considérons un élément j_k dans $C - j_s$. Comme $k > s$, nous savons que $(i_s, j_k) \notin E(D_I)$, i.e. $(I - i_s) + j_k \notin \mathcal{I}$. Ainsi, si $e \in C - j_s$, alors soit $e \in I - i_s$ et donc $r_{\mathscr{M}}((I - i_s) + e) = r_{\mathscr{M}}(I - i_s)$, soit $e = j_k$ avec $k > s$ et l'on obtient à nouveau que $r_{\mathscr{M}}((I - i_s) + e) = r_{\mathscr{M}}(I - i_s)$. D'après le lemme 15 du cours, il suit que $r_{\mathscr{M}}((I - i_s) \cup (C - j_s)) = r_{\mathscr{M}}(I - i_s)$.

De plus, C étant un circuit contenant j_s, nous avons $r_{\mathscr{M}}(X \cup (C - j_s)) = r_{\mathscr{M}}(X \cup C)$ pour tout $X \subseteq E$. En particulier, nous inférons donc que $r_{\mathscr{M}}((I - i_s) \cup C) = r_{\mathscr{M}}(I - i_s)$, i.e. $r_{\mathscr{M}}((I - i_s) + j_s) < r_{\mathscr{M}}(I)$. Ceci conclut la démonstration. $\square$

2. Fin de la démonstration du théorème d'intersection

Rappel de la situation. Nous avons un ensemble fini E et deux matroïdes $\mathscr{M}_1 = (E, \mathcal{I}_1)$ et $\mathscr{M}_2 = (E, \mathcal{I}_2)$ sur E. Nous voulons démontrer l'inégalité suivante.

$$\max_{I \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2} |I| \geq \min_{E_1 \cup E_2 = E} r_{\mathscr{M}_1}(E_1) + r_{\mathscr{M}_2}(E_2). \tag{2.1}$$

On rappelle que l'on a déjà démontré l'inégalité réciproque.

La démonstration est présentée sous forme d'une série d'exercices.

Pour $I \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$, soit D_I le graphe biparti *orienté* avec bipartition $(I, E \setminus I)$ tel que pour tout $i \in I$ et tout $j \in E \setminus I$,

- $i \to j$ est un arc si, et seulement si, $(I - i) + j \in \mathcal{I}_1$; et
- $j \to i$ est un arc si, et seulement si, $(I - i) + j \in \mathcal{I}_2$.

Pour $i \in \{1, 2\}$, posons $X_i \coloneqq \{e \in E \setminus I \,:\, I + e \in \mathcal{I}_i\}$.

Un « chemin augmentant de X_1 vers X_2 » est un chemin orienté $v_1, \dots, v_s$ tel que $v_1 \in X_1$, $v_s \in X_2$ et $v_i \to v_j$ est un arc de D_I seulement si $j = i + 1$. (De façon informelle, cette dernière propriété signifie que le chemin n'a pas de raccourci, i.e. est le plus court possible.)

1. Exercice : si chaque sommet d'un graphe orienté D possède un arc entrant, alors D contient un cycle orienté.

Exercice 3. Le but de cet exercice est de montrer que s'il n'existe pas de chemin augmentant de X_1 vers X_2, alors I est de taille maximum dans $\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$ et l'on peut donner une partition (E_1, E_2) de E satisfaisant (2.1).

Dans tout l'exercice, l'on suppose qu'il n'existe pas de chemin augmentant de X_1 vers X_2.

(1) Concluez dans le cas où l'un des ensembles X_i est vide.

Nous supposons à présent que $X_i \neq \emptyset$ pour $i \in \{1, 2\}$. Soient

$$E_1 \coloneqq \{e \in E \,:\, \text{il existe un chemin augmentant de } e \text{ à } X_2 \text{ dans } D_I\}$$

et $E_2 \coloneqq E \setminus E_1$.

(2) Montrez que $X_i \cap E_i = \emptyset$ pour tout $i \in \{1, 2\}$.

Nous allons commencer par prouver que $r_{\mathscr{M}_1}(E_1) \leq |I \cap E_1|$. Nous procédons par l'absurde, l'on suppose donc que $r_{\mathscr{M}_1}(E_1) > |I \cap E_1|$.

(3) Prouvez l'existence d'un élément $x \in E_1 \setminus I$ tel que $(I \cap E_1) + x \in \mathcal{I}_1$.

(4) Déduisez-en que $I + x \notin \mathcal{I}_1$.

(5) En utilisant le lemme du circuit unique [2], prouvez l'existence d'un élément $y \in I \setminus E_1$ tel que $(I - y) + x \in \mathcal{I}_1$.

(6) Concluez en obtenant une contradiction.

Le but à présent est de montrer que $|I| = r_{\mathscr{M}_1}(E_1) + r_{\mathscr{M}_2}(E_2)$.

(7) Prouvez comme précédemment que $r_{\mathscr{M}_2}(E_2) \leq |I \cap E_2|$.

(8) Déduisez-en l'égalité précédente.

(9) Déduisez de cette égalité que I est de taille maximum dans $\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$.

L'exercice suivant traite le cas où il existe un chemin augmentant P de X_1 vers X_2. Soit $I' \coloneqq I \triangle V(P)$. Le but, cette fois-ci, est de prouver que $I' \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$ et $|I'| > |I|$.

Exercice 4. Soit P un chemin augmentant de X_1 vers X_2 dans D_I. Notons $P = a_0 \to b_1 \to a_1 \to \ldots \to a_\ell$ et posons $J \coloneqq (I \setminus \{b_1, \ldots, b_\ell\}) \cup \{a_1, \ldots, a_\ell\}$. Ainsi $I' = J + a_0$.

(1) Montrez que le graphe non-orienté sous-jacent à D_I contient un unique couplage parfait entre $I \setminus J$ et $J \setminus I$.

(2) Déduisez-en que $J \in \mathcal{I}_1$.

(3) Prouvez que $a_i \notin X_1$ si $i \geq 1$.

(4) Déduisez-en que $r_{\mathscr{M}_1}(I + J) = r_{\mathscr{M}_1}(I) = r_{\mathscr{M}_1}(J)$.

(5) Concluez que $I' \in \mathcal{I}_1$.

(6) Réalisez que $I' \in \mathcal{I}_2$ *par symétrie.*

(7) Concluez.

La démonstration du théorème d'intersection est à présent complète.

Exercice 5. En vous basant sur la démonstration précédente, donnez une description en pseudo-code d'un algorithme renvoyant un ensemble de taille maximum qui soit indépendant à la fois dans $\mathscr{M}_1$ et dans $\mathscr{M}_2$.

2. Exercice 4 de la feuille d'exercices.