

MATROÏDES — QUELQUES EXERCICES

JEAN-SÉBASTIEN SERENI

TABLE DES MATIÈRES

Exercice 1. Soit G un graphe biparti avec bipartition (A, B) . Un *couplage* de G est un ensemble d'arêtes de G deux-à-deux disjointes. Soit $\mathcal{X}$ la collection de tous les couplages de G . Le couple $(E(G), \mathcal{X})$ est-il un matroïde ?

Exercice 2. Soit $\mathcal{M} = (E, \mathcal{I})$ un matroïde.

(1) Pour un entier k fixé, posons

$$\mathcal{I}_k := \{X \in \mathcal{I} : |X| \leq k\}.$$

(a) Prouvez que $(E, \mathcal{I}_k)$ est un matroïde. Un tel matroïde est dit « tronqué ».

(b) Quelle est la fonction de rang de $(E, \mathcal{I}_k)$?

(2) Pour un ensemble $E' \subseteq E$, posons

$$\mathcal{I}_{E'} := \{I \cap E' : I \in \mathcal{I}\}.$$

Prouvez que $(E, \mathcal{I}_{E'})$ est un matroïde. C'est le « sous-matroïde de $\mathcal{M}$ restreint à E' ».

Exercice 3. Soit $(E)_{i=1}^m$ une partition d'un ensemble fini E . Soient $k_1, \dots, k_\ell$ des entiers. Posons

$$\mathcal{I} := \{X \subseteq E : \forall i \in \{1, \dots, m\}, |X \cap E_i| \leq k_i\}.$$

Montrez que le couple $(E, \mathcal{I})$ est un matroïde. L'hypothèse $E_i \cap E_j = \emptyset$ si $i \neq j$ est-elle nécessaire pour obtenir un matroïde ?

Exercice 4. Soit $\mathcal{M} = (E, \mathcal{I})$ un matroïde. Soient $I \in \mathcal{I}$ et $e \in E$ tels que $I + e \notin \mathcal{I}$. Prouvez qu'il existe un unique circuit C contenu dans $I + e$.

Que signifie cette propriété pour le matroïde graphique (en termes de graphes) ?

Exercice 5. Le but de cet exercice est d'introduire le « dual d'un matroïde ». Soit $\mathcal{M} = (E, \mathcal{I})$ un matroïde. Posons $\mathcal{B} := \mathcal{B}(\mathcal{M})$.

(1) Prouvez la propriété suivante.

(B2') Soient B_0 et B_1 deux bases de $\mathcal{M}$ et soit $e \in B_1 \setminus B_0$. Il existe un élément $f \in B_0 \setminus B_1$ tel que $(B_0 - f) + e \in \mathcal{B}$.

Soit $\mathcal{B}^*$ la collection de tous les ensembles qui sont complémentaires dans E d'une base de $\mathcal{M}$, c'est-à-dire

$$\mathcal{B}^* := \{X \subseteq E : \exists B \in \mathcal{B}, X = E \setminus B\}.$$

- (2) Prouvez que $\mathcal{B}^*$ est la famille de bases d'un matroïde sur E . À cette fin, l'exercice 4 peut être utile.

Le matroïde obtenu est appelé « matroïde dual » de $\mathcal{M}$ et noté $\mathcal{M}^*$.

- (3) Identifiez $(\mathcal{M}^*)^*$.
- (4) Quel est le dual du matroïde uniforme $U_{m,n} := (E, \mathcal{I})$, où E est un ensemble fini de taille n et $\mathcal{I}$ est composé de tous les sous-ensembles de E de taille au plus m ?

Soient r la fonction de rang de $\mathcal{M}$ et r^* celle de $\mathcal{M}^*$.

- (5) Que vaut $r(\mathcal{M}) + r^*(\mathcal{M}^*)$?

- (6) Déduisez-en que pour tout sous-ensemble X de E ,

$$(5.1) \quad r^*(X) = |X| - r(M) + r(E \setminus X).$$

Exercice 6. Considérons un processeur devant effectuer n tâches. Chaque tâche s'exécute en une unité de temps. Le processeur ne peut exécuter qu'une tâche à la fois. À chaque tâche $j \in \{1, \dots, n\}$ sont associés un profit c_j et un temps limite d_j . La tâche j rapporte c_j si son exécution est terminée au plus tard au temps limite d_j . Une tâche est exécutée au plus une fois. Un « ordonnancement » des tâches est un ordre d'exécution des n tâches. Le but est de trouver un ordonnancement des tâches qui maximise le profit.

Soit X un ensemble de tâches. Un ordonnancement des tâches

- est « croissant pour X » si les tâches dans X sont ordonnées de façon croissante suivant leur temps limite ;
- « termine X à temps » si toutes les tâches dans X sont terminées avant leur temps limite.

- (1) Prouvez que s'il existe un ordonnancement qui termine X à temps, alors il existe un ordonnancement croissant qui termine X à temps.
- (2) Soit $\mathcal{I} := \{I \subseteq \{1, \dots, n\} : \text{il existe un ordonnancement terminant } I \text{ à temps}\}$. Prouvez que $(\{1, \dots, n\}, \mathcal{I})$ est un matroïde.
- (3) Concluez.

Exercice 7. Explicitez la fonction de rang du matroïde graphique.

Exercice 8. Soit G un graphe et soit c une « k -coloration » des arêtes de G , c'est-à-dire une fonction de $E(G)$ vers $\{1, \dots, k\}$. Un sous-graphe H de G est « multicolore » si, et seulement si, H ne contient pas deux arêtes de la même couleur.

- (1) Exprimez les arbres couvrants multicolores de G comme les sous-ensembles maximaux qui sont indépendants dans deux matroïdes.
- (2) Déduisez-en que G possède un arbre couvrant multicolore si, et seulement si, pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$ et pour tout ensemble $C \subseteq \{1, \dots, k\}$ de taille i , le sous-graphe couvrant G' de G obtenu en supprimant les arêtes dont la couleur appartient à C (i.e. $V(G') = V(G)$ et $E(G') = \{e \in E(G) : c(e) \notin C\}$) possède au plus $i + 1$ composantes connexes.

Exercice 9. Soit G un graphe. Notons M_1 et M_2 deux couplages de G . Décrivez la structure du sous-graphe de G obtenu en ne gardant que les arêtes dans $M_1 \triangle M_2$.¹

1. Pour deux ensembles X et Y , on note $X \triangle Y$ l'ensemble $(X \cup Y) \setminus (X \cap Y)$.

Exercice 10. Soit $\mathbf{F}$ un corps. Donnez une représentation sur $\mathbf{F}$ du matroïde graphique associé à K_4 , le graphe complet à 4 sommets (un graphe est « complet » s'il n'existe pas deux sommets distincts non adjacents.)

Exercice 11. Soit $\mathcal{M} = (E, \mathcal{I})$ un matroïde. Pour tout $X \subseteq E$, posons

$$\lambda(X) := r_{\mathcal{M}}(X) + r_{\mathcal{M}}(E \setminus X) - r_{\mathcal{M}}(\mathcal{M}) + 1.$$

(1) Montrez que λ est une fonction symétrique et sous-modulaire.

Si T est un arbre, $E(T)$ est l'ensemble des arêtes de T et $\ell(T)$ est l'ensemble des feuilles de T (une « feuille » d'un arbre est un sommet de degré 1.)

Une « décomposition en branches » de $\mathcal{M}$ est une paire (T, τ) où T est un arbre dont tous les sommets ont degré 1 ou 3 et τ est une bijection de E vers $\ell(T)$

(2) Donnez une décomposition en branches du matroïde de Pappus, du matroïde non Pappus, du matroïde de Vámos et des matroïdes F_7 et F_7^- .

Soient (T, τ) une décomposition en branches de $\mathcal{M}$ et e une arête de T . Le graphe $T - e$ est l'union disjointe de deux arbres T_1 et T_2 . Notons $X_i := \tau^{-1}(\ell(T_i))$. La « largeur de l'arête e » (respectivement à (T, τ) et $\mathcal{M}$) est

$$\omega(e) := \lambda(X_1).$$

La « largeur » de la décomposition en branches (T, τ) de $\mathcal{M}$ est

$$\begin{cases} \max_{e \in E(T)} \omega(e) & \text{si } E(T) \neq \emptyset, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La « largeur de branche » du matroïde $\mathcal{M}$ est le plus petit entier b pour lequel il existe une décomposition en branches de $\mathcal{M}$.

(3) Expliquez pourquoi la définition de la largeur d'une arête est consistante.

(4) Calculez les largeurs des décompositions en branches que vous avez données à la question (2).

(5) Donnez une décomposition en branches de largeur 3 du matroïde de Pappus.

(6) Montrez que la largeur de branche du matroïde de Pappus est égale à 3.

À présent, notons $\mathcal{M}$ le matroïde sur l'ensemble $\{1, \dots, 8\}$ dont une représentation standard sur $\mathbf{F}_2$ est

$$\begin{matrix} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

(7) Donnez une décomposition en branches de largeur 3 de $\mathcal{M}$.

(8) Montrez que la largeur de branche de $\mathcal{M}$ est égale à 3.

Exercice 12. Soit $E := \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Soit $\mathcal{M}$ le matroïde sur E dont les bases sont tous les sous-ensembles de taille 3 de E sauf $\{1, 3, 5\}$ et $\{2, 4, 5\}$.

(1) Quels sont les circuits de $\mathcal{M}$?

- (2) Quels sont les hyperplans de $\mathcal{M}$?
- (3) Quels sont les circuits de $\mathcal{M}^*$?
- (4) Quels sont les hyperplans de $\mathcal{M}^*$?

Exercice 13. Soit $\mathcal{M} = (E, \mathcal{I})$ un matroïde. Démontrez que si C_0 et C_1 sont deux circuits de $\mathcal{M}$, si $e \in C_0 \cap C_1$ et $f \in C_0 \setminus C_1$, alors il existe un circuit C de $\mathcal{M}$ contenu dans $(C_0 \cup C_1) - e$ tel que $f \in C$.

Vous pouvez procéder de la façon suivante. Supposons, par l'absurde, qu'il existe deux circuits ne vérifiant pas la propriété demandée. Nous choisissons deux circuits C_0 et C_1 ne vérifiant pas la propriété et tels que leur union soit la plus petite possible (en taille).

- (1) Prouvez qu'il existe un circuit C_2 contenu dans $(C_0 \cup C_1) - e$.
- (2) Pourquoi existe-t-il un élément dans $C_1 \cap C_2$? Nous noterons g un tel élément.
- (3) Que pouvez-vous dire de $|C_1 \cup C_2|$? Déduisez-en l'existence d'un circuit C_3 tel que $e \in C_3$ et $C_3 \subseteq (C_0 \cup C_1) - g$.
- (4) Démontrez qu'il existe un circuit C_4 contenu dans $(C_0 \cup C_3) - e$ et tel que $f \in C_4$.
- (5) Concluez.

Exercice 14. Soit $\mathcal{M} = (E, \mathcal{I})$ un matroïde. Appelons « séparateur de $\mathcal{M}$ » tout sous-ensemble X de E tel que tout circuit de $\mathcal{M}$ soit entièrement contenu dans X ou dans $E \setminus X$. En d'autres termes, pour tout circuit C de $\mathcal{M}$, soit $C \cap X = \emptyset$ soit $C \cap (E \setminus X) = \emptyset$.

Démontrez qu'un sous-ensemble X de E est un séparateur de $\mathcal{M}$ si, et seulement si, $r_{\mathcal{M}}(X) + r_{\mathcal{M}}(E \setminus X) = r_{\mathcal{M}}(\mathcal{M})$.

Exercice 15. Soit $\mathcal{M}$ un matroïde tel qu'il existe un sous-ensemble X de ses éléments qui soit à la fois un circuit et un hyperplan. Posons $\mathcal{B}' := \mathcal{B}(\mathcal{M}) \cup \{X\}$.

- (1) Démontrez que $\mathcal{B}'$ est la famille de bases d'un matroïde sur E , noté $\mathcal{M}'$.
- (2) Démontrez que

$$\mathcal{C}(\mathcal{M}') = (\mathcal{C}(\mathcal{M}) \setminus X) \cup \{X + e : e \in E(\mathcal{M}) \setminus X\}.$$

- (3) Montrez, à l'aide des questions précédentes, que le matroïde non Pappus est bien un matroïde.

Exercice 16. Soit A une matrice de taille $n \times m$ à coefficients dans $\{0, 1\}$. Notons G le graphe biparti dont l'ensemble de sommets est $\{u_1, \dots, u_n\} \cup \{v_1, \dots, v_m\}$ et tel que (u_i, v_j) est une arête si, et seulement si, $A(i, j) = 1$. Montrez que G contient un cycle si, et seulement si, A contient une sous-matrice telle que chaque ligne et chaque colonne comporte au moins deux coefficients égaux à 1.

Exercice 17. Considérons le matroïde vectoriel $\mathcal{M}$ défini par la matrice suivante à coefficients dans $\mathbf{F}_3$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (1) Identifiez le matroïde dual de $\mathcal{M}$.
- (2) Soit $\mathbf{F}$ un corps. Démontrez que $\mathcal{M}$ est représentable sur $\mathbf{F}$ si, et seulement si, la caractéristique de $\mathbf{F}$ est différente de 2.